Géométrie plane, projeté orthogonal.

Livre p.148.
Les propriétés de géométrie plane vues au collège sont rappelées p.335-336 du livre.

Objectifs :

- Réinvestir la géométrie vue au collège (triangles, quadrilatères, cercles) dans la résolution de problèmes
- Géométrie repérée : savoir déterminer un milieu, calculer une distance.
- Savoir calculer des longueurs, des angles, des aires et des volumes.
- Définir et savoir utiliser le projeté orthogonal, la distance d'un point à une droite ; traiter des problèmes d'optimisation.

Aperçu historique :

Les problèmes de repérage se sont posés dès l'Antiquité, en particulier dans les domaines de l'astronomie et de la navigation. Au IIIème siècle av. J.C., Eratosthène a fabriqué une "carte du monde" qui faisait déjà appel à des coordonnées géographiques.
On considère que ce sont Descartes et Fermat, au XVIIème siècle, qui ont inventé la notion de coordonnées dans un repère. Leur objectif était de résoudre, grâce à cet outil, des problèmes de géométrie par le calcul.

1. Repères du plan.

Définition 2.1 On appelle repère du plan la donnée de trois points O, I, J du plan, non alignés.

Ces trois points vont permettre de construire un système de coordonnées dans le plan.
On dit parfois que l'on a un triplet (O ;I ;J).

Définition 2.2 On dit que le repère (O ;I ;J) est orthonormé ssi* OI=OJ=1, et (OI)$\perp$(OJ).

*ssi est une abréviation pour "si et seulement si".
"Ortho" signifie "droit" : les droites (OI) et (OJ) forment un angle droit.
"Normé" signifie "de même norme", c'est-à-dire ici "de même longueur" ; la longueur prise pour unité sur (OI) est la même que celle prise pour unité sur (OJ).
Voici un repère orthonormé (figure 1), et à titre de curiosité : un repère orthogonal, mais non normé (figure 2), un repère normé, mais non orthogonal (figure 3).

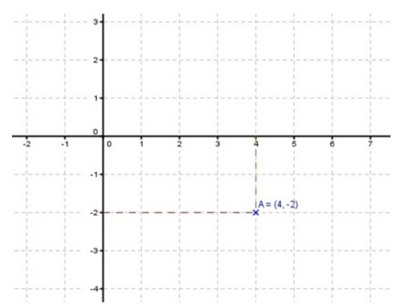


figure 1

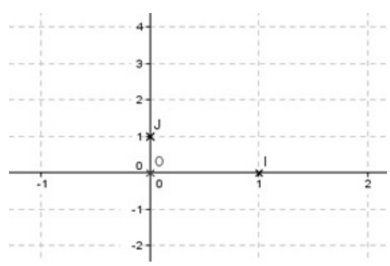


figure 2

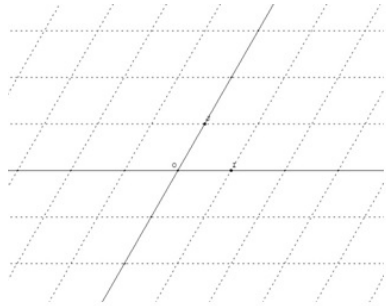


figure3

Définition 2.3 L'axe (OI) est appelé axe des abscisses, et l'axe (OJ) axe des ordonnées. Pour un point M du plan, on note x_M son abscisse, et y_M son ordonnée, d'où la notation $M(x_M; y_M)$.

Attention, il n'y a aucun symbole entre le nom du point et la parenthèse qui contient son couple de coordonnées : pas de =, pas de :, rien du tout.
Le point de l'axe des abscisses qui correspond à x_M est le projeté orthogonal du point M sur la droite (OI).
De même, le point de (OJ) correspondant à y_M est le projeté orthogonal de M sur (OJ).

2. Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété 2.1 Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan. Soit I le milieu de $[AB]$. Les coordonnées du point I vérifient : $x_I = \frac{x_A+x_B}{2}$ et $y_I = \frac{y_A+y_B}{2}$.

Démonstration :
1er cas : $x_A = x_B$ ou $y_A = y_B$. Quitte à inverser les rôles joués par x et y, on suppose par exemple que $y_A = y_B$, et $x_A < x_B$ (figure 1).
I est le milieu de $[AB]$ ssi $\in [AB]$ et $IA = IB$ (c'est la définition du milieu d'un segment). Donc, si l'on traduit ceci en termes de coordonnées dans notre cas de figure, I est le milieu de $[AB]$ ssi $y_I = y_A = y_B$, et $x_I - x_A = x_B - x_I$.
Résolvons cette dernière équation en prenant x_I pour inconnue : $x_I - x_A = x_B - x_I$
$x_I - x_A + x_I = x_B - \cancel{x_I} + \cancel{x_I}$
$x_I - x_A + x_I = x_B$
$x_I - \cancel{x_A} + x_I + \cancel{x_A} = x_B + x_A$
$x_I + x_I = x_B + x_A$
$2x_I = x_B + x_A$
$x_I = \frac{x_B+x_A}{2}$
Finalement, I est le milieu de $[AB]$ ssi $y_I = y_A = y_B$, et $x_I = \frac{x_B+x_A}{2}$.
On raisonnerait de même dans le cas $y_A = y_B$, et $x_A > x_B$.
2ème cas : $x_A \neq x_B$ ou $y_A \neq y_B$ (figure 2).
Soit C le point de coordonnées $x_C = x_B$ et $y_C = y_A$. Par construction, le triangle ABC est rectangle en C. Soit K le milieu de $[AC]$. D'après le "théorème des milieux" (cas particulier de la réciproque du théorème de Thalès), on a $(IK)//(BC)$. Ainsi, (IK) est verticale, et on a (d'après le 1er cas, en considérant les points A et C) : $x_I = x_K = \frac{x_A+x_C}{2}$. Comme $x_C = x_B$, on a donc $x_I = \frac{x_B+x_A}{2}$.
De la même manière, en considérant le milieu L de $[BC]$, on montre que $y_I = \frac{y_B+y_A}{2}$.
3ème cas : $x_A =_B$ et $y_A = y_B$, dans ce cas les points A et B sont confondus, d'où $A = B = I$, et la formule proposée reste valable.

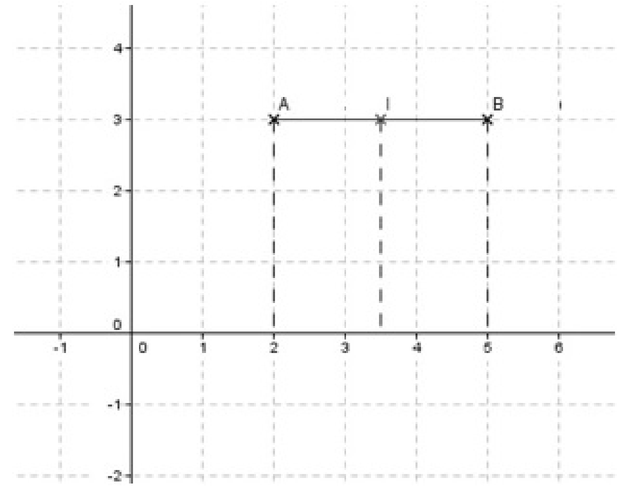


figure 1 : 1er cas

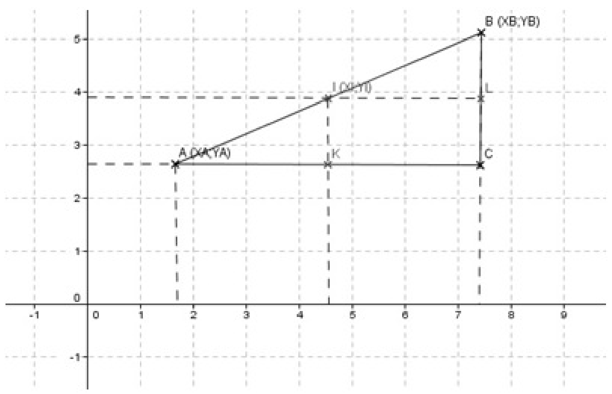


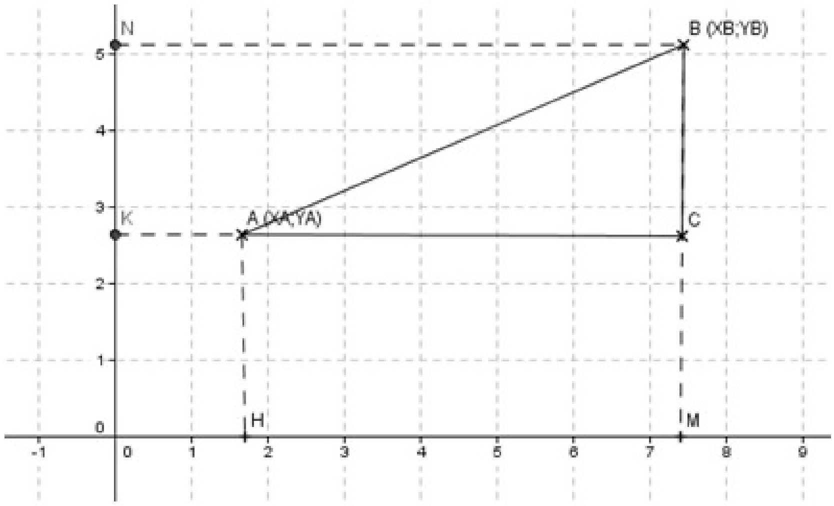
figure 2 : 2ème cas

3. Distance entre deux points du plan, cercle, médiatrice.

A. Distance dans le plan repéré.

Propriété 2.2 On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé.
Soient $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points du plan. La distance AB vérifie :
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Démonstration On peut supposer, sans perte de généralité, que $x_A < x_B$ et $y_A < y_B$.
Soit C le point de coordonnées $x_C = x_B$ et $y_C = y_A$. Par construction, le triangle ABC est rectangle en C.
D'après le théorème de Pythagore, on a donc : $AB^2 = AC^2 + BC^2$.
Or $AC = HM = x_B - x_A$, et $CB = KN = y_B - y_A$
Dans l'égalité de Pythagore, il vient : $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$.
Les deux membres sont positifs en tant que carrés ou somme de carrés, donc le passage à la racine est légitime, d'où le résultat.



Cette démonstration n'est valable que dans un repère orthogonal, car on a utilisé le théorème de Pythagore. Dans le cas de repères non orthonormés, il faut faire appel à des matrices de changement de repère pour adapter ces formules.

B. Applications.

Définition 2.4 Soient A un point du plan et r un nombre positif.
Le cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon r est l'ensemble des points du plan qui sont à la distance r du point A.
On note : $\mathscr{C} = \{M \mid AM = r\}$

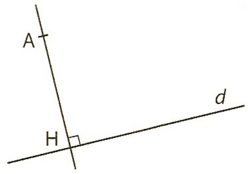
Définition 2.5 La médiatrice d'un segment est $[AB]$ est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu.

Propriété 2.3 Tout point M appartenant à la médiatrice de $[AB]$ est équidistant de A et de B.
Réciproquement, tout point équidistant des extrémités d'un segment appartient à la médiatrice de ce segment.

Démonstration Soient $[AB]$ un segment, I son milieu et Δ sa médiatrice.

- Soit $M \in \Delta$. Dans le triangle AMB, la hauteur Δ issue de M coupe le côté opposé $[AB]$ en son milieu. C'est donc une médiane. Par suite, AMB est isocèle de sommet principal M, et donc $MA = MB$.
- Soit M un point du plan tel que $MA = MB$. Alors AMB est isocèle de sommet principal M, donc la médiane MI issue de M est également une hauteur. Par suite $(MI) \perp (AB)$, et la droite (MI) est perpendiculaire à $[AB]$ en son milieu, c'est donc une médiatrice, ce qui achève la démonstration.

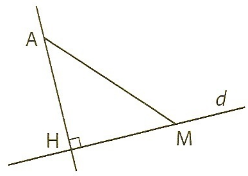
4. Projeté orthogonal et distance d'un point à une droite



Définition 2.6 Soient A un point et d une droite du plan.
On appelle ***projeté orthogonal*** H de A sur d le point d'intersection de d et de la perpendiculaire à d passant par A.

Remarque 2.1 Si $A \in d$, alors $H = A$

Définition 2.7 On appelle distance d'un point à une droite la plus petite distance entre ce point et un point de la droite.

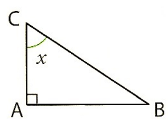


Propriété 2.4 Soient A un point et d une droite du plan, tels que $A \notin d$.
Soit H le projeté orthogonal de A sur d. La distance du point A à la droite d est la distance AH.

Démonstration <u>**ROC : Démonstration à savoir refaire**</u>
Dire que H est le point de d pour lequel la distance entre A et ce point est la plus petite signifie :
pour tout point M de d, $AM \geqslant AH$.
Soit donc un point M de D. Par disjonction des cas :

- Si $M = H$.
  Alors $AM = AH$.
- Si $M \neq H$.
  Alors les points A, H, M forment un triangle rectangle en H, et comme l'hypoténuse AM en est le plus grand côté $(^*)$, on a $AM \geqslant AH$.
  $(^*)$ Pour s'en convaincre, écrire le théorème de Pythagore dans AHM rectangle en H :
  $AM^2 = AH^2 + HM^2$, avec $HM^2 \geqslant 0$, donc $AM^2 \geqslant AH^2$, et comme la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}+^*$ (voir chapitre

5. Relations trigonométriques dans le triangle rectangle



Propriété 2.5 Soit α la mesure en degrés d'un angle aigu$(^*)$. On a la relation :

$$(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$$

que l'on notera aussi : $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

$(^*)$ angle aigu : $0° < \alpha < 90°$.

Remarque 2.2 Pour alléger l'écriture, on écrit $\cos^2\alpha$ au lieu de $(\cos\alpha)^2$, mais ce n'est pas "cos" qui est au carré !

Démonstration <u>**ROC : Démonstration à savoir refaire**</u>
Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $\widehat{ACB} = \alpha$.
Alors, d'après votre cours de collège $(^*)$ on a :
$\cos\alpha = \frac{AC}{BC}$ et $\sin\alpha = \frac{AB}{BC}$.
Il vient $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \frac{AC^2}{BC^2} + \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AC^2+AB^2}{BC^2}$
Or d'après le théorème de Pythagore on a : $AC^2 + AB^2 = BC^2$, d'où $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \frac{BC^2}{BC^2} = 1$

$(^*)$ que vous trouverez aussi sur le site **http ://maths.langella.free.fr**,
section Collège, cours de Troisième, Chapitre 04 : Trigonométrie.